Estratto dagli *Atti e Memorie della Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena* - Serie VI, Vol. XIX - 1977

CARLO FELICE MANARA - MARIA SPOGLIANTI

La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese.

SUMMARY

This paper **deals** *vith a sharp controversy arisen among three renowned mathematicians by the end of XIX century. This matter is of some consequence in the history of Mathematics, for it mirrors scientific ideas of those times and the development of fundamental concepts of sciences in general and modern geometry in particular.*

1. La nozione di spazio ad n dimensioni è oggi comunemente accettata tra i matematici; infatti essi non hanno più alcuna difficoltà ad utilizzare il linguaggio geometrico ed a chiamare *punto* un ente qualesivoglia determinato da n numeri. Simile concezione svuota di ogni significato reale il linguaggio geometrico stesso e con ciò svitalizza le discussioni del tipo di quella che stiamo per presentare e commentare brevemente; tuttavia proprio il fatto che certe polemiche siano avvenute, e che oggi invece siano considerate praticamente prive di senso, dimostra che esse hanno contribuito non poco alla evoluzione della geometria in particolare e della matematica in generale.

Pertanto crediamo interessante analizzare una polemica fra i tre rinomati matematici G. Peano, C. Segre e G. Veronese, per renderci conto delle rispettive posizioni scientifiche e concezioni a proposito di certi problemi che interessano da sempre il matematico: per esempio, la genesi dei concetti matematici, ed in particolare dei concetti geometrici, il significato conoscitivo della geometria, la vera portata del rigore nelle definizioni e nei ragionamenti, e così via.

Invero la breve discussione che stiamo per esaminare sembra avere due materie del contendere, come si direbbe con termine giuridico: l'una riguarda la definizione del concetto di spazio ad n dimensioni, l'altra il significato del rigore in matematica. Ci si avvede abbastanza facilmente che la seconda questione è quella che veramente interessava G. Peano: la prima, in certo qual modo, fu soltanto la causa occasionale della polemica.

Tuttavia, prima di informare sullo svolgimento della controversia, vorremmo brevemente riferire quale fosse, all'epoca, l'età dei contendenti ed analizzare in particolare il punto a cui era giunta l'evoluzione del pensiero di ciascuno di essi.

2. Per quanto riguarda G. Peano, diremo anzitutto che, all'epoca della polemica, egli aveva trentatré anni (era nato nel 1858) ed aveva già fornito prove fondamentali dell'altezza del suo ingegno. In particolare, aveva pubblicato il trattato *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale* [18]; tale volume figurava come opera di A. Genocchi, ma aveva già dato luogo alle celebri precisazioni con le quali A. Genocchi stesso aveva pubblicamente reso noto che le cose più importanti e le effettive novità contenute nel testo andavano attribuite al suo giovane (allora) allievo G. Peano [8]. Inoltre questi da tempo aveva sondato in profondità i concetti fondamentali dell'aritmetica [32] e della geometria; in particolare, con riguardo a tale disciplina, nel 1890 aveva pubblicato la nota fondamentale sulla definizione di area delle superfici curve [33] e la famosa memoria sul concetto di curva continua che riempie tutto un quadrato [34]. Inoltre egli aveva già sviluppato il suo calcolo logico e, all'epoca che qui ci interessa, stava occupandosi attivamente di logica.

Potremmo pertanto affermare che G. Peano era particolarmente sensibile ai problemi connessi ai fondamenti della matematica, perché stava elaborando, o addirittura perfezionando, il proprio pensiero in proposito. Questa mentalità di G. Peano spiega l'atteggiamento di questo matematico nel confronto del soggetto della polemica; e le caratteristiche del suo pensiero e la profondità, forse non debitamente compresa da parte dei suoi contemporanei, della sua analisi logica sui principi della matematica forniscono una spiegazione precisa alle risposte ed agli atteggiamenti dei contraddittori.

Corrado Segre era il più giovane dei tre contendenti: all'epoca della polemica aveva ventotto anni, essendo nato nel 1863. Era professore di geometria presso la R. Università di Torino e quindi collega di G. Peano. A quel tempo, egli aveva già elaborato alcuni importantissimi risultati di geometria algebrica con metodo iperspaziale; tra le altre, ricordiamo per esempio la memoria *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi* ([47], pp. 173-185), dove viene costruita quella varietà chiamata oggi nella letteratura geometrica *varietà di Segre*, e d'altra parte ricordiamo anche che C. Segre avrebbe pubblicato nel 1894 la memoria fondamentale *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* ([47], pp. 198-304), in cui, con procedimento iperspaziale, sono ritrovati i risultati fondamentali della geometria sopra una curva algebrica irriducibile. Nei riguardi degli iperspazi, l'atteggiamento di C. Segre potrebbe giustamente essere descritto con le espressioni adottate da F. Severi ([48], pp. VII-VIII):

Per VERONESE, *per* SEGRE, *per* BERTINI, *per tutti i nostri Maestri insomma di geometria iperspaziale, punti, rette, piani di un* S_n *lineare, sono vere entità geometriche e non meri attributi di entità analitiche. Lo spazio lineare ad* n *dimensioni per loro è* come se *realmente esistesse: non ridotto cioè alle ombre di una banale finzione di linguaggio. È con questa fede soltanto che a poco a poco si forma una sorta di intuizione iperspaziale e ci si pone il problema del significato logico che questa intuizione può avere, significato dal principio un po' vago, ma di cui gradatamente si riesce a costruire il fondamento razionale.*

Giuseppe Veronese era il più anziano dei tre contendenti ed aveva all'epoca della polemica trentasette anni, essendo nato nel 1854. Professore nella R. Università di Padova, aveva fatto, per così dire, da pioniere della geometria degli iperspazi, avendo già pubblicato a questo riguardo due memorie fondamentali (oltre a numerose altre opere che non interessano ai fini della nostra indagine): la memoria intitolata *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen dimensionen durch das Princip der Projicirens und Schneidens* [49] e quella intitolata *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario* [50], nella quale aveva introdotto quella classica superficie oggi abitualmente chiamata appunto *superficie di Veronese.*

Nel 1891, egli pubblicò il volume *Fondamenti di geometria a più dimensioni ed a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare* [51], che ha come sottotitolo *Lezioni per la Scuola di Magistero in Matematica*; in esso G. Veronese espone i fondamenti dell'aritmetica, della geometria degli iperspazi e, tra l'altro, fornisce un primo esempio di geometria non archimedea.

L'atteggiamento dell'autore in questione nei riguardi degli iperspazi, che esamineremo ulteriormente in seguito, può essere per il momento descritto sommariamente dalle frasi che C. Segre scrisse nella commemorazione tenuta presso l'Accademia Nazionale dei Lincei ([46], pp. 252-253):

Per VERONESE *gli elementi generatori degli spazi superiori non sono più elementi di natura qualsiasi, bensì i punti tali quali ce li immaginiamo nel nostro spazio; e con essi si formano le diverse varietà e corrispondenze, si opera con projezioni e sezioni, ecc. come nella geometria ordinaria.*

Da questi brevissimi cenni sulla carriera precedente e sulle ricerche in corso dei vari contendenti, appare subito che le concezioni che G. Peano aveva del concetto di iperspazio e, in generale, del rigore in matematica e del ruolo dell'intuizione nell'indagine scientifica dovevano necessariamente essere del tutto diverse da quelle degli altri due geometri. Si incomincia quindi ad intravvedere quali saranno i rispettivi argomenti a proposito dell'*esistenza* e delle proprietà degli spazi ad *n* dimensioni. Comunque, prima di analizzare ulteriormente l'argomento e di passare alla cronoca della polemica, conviene dare qualche notizia sulla storia della nozione di iperspazio, nozione che viene maturando nella mente dei matematici soprattutto durante il secolo XIX.

3. Si potrebbe dire che già J.L. Lagrange, nella sua *Mécanique analytique* [28] abbia introdotto delle coordinate generali per i sistemi di punti materiali; e questa introduzione può a ragione essere considerata il preludio all'introduzione esplicita del concetto di spazio ad un numero qualsivoglia di dimensioni.

Secondo G. Veronese ([51], p. 610), il primo ad usare la espressione *geometria ad* n *dimensioni* fu A. Cayley ([10], p. 55).

Successivamente A. Cauchy introdusse esplicitamente il linguaggio geometrico, definendo la *varietà ad* n *dimensioni* nei seguenti termini [9]: *Data una varietà numerica di* n *variabili indipendenti* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *ogni sistema di valori* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *si chiama* punto analitico. *Ogni equazione o più sistemi di equazioni con queste variabili rappresentano un* luogo analitico. Retta analitica è *un sistema di punti analitici, le cui diverse coordinate si esprimono mediante delle funzioni lineari di una tra esse. Infine la* distanza di due punti analitici è *la radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate corrispondenti di quei due punti.*

Sempre secondo G. Veronese ([51], p. 610), questa definizione e l'atteggiamento corrispondente sono adottati anche da G. Salmon [43], E. Beltrami [2], L. Kronecker [27], E. Betti [4], C. Jordan [24], S. Lie [29], F. Klein [25], G. Halphen [21], G. Darboux [12].

Altro atteggiamento, sempre secondo G. Veronese ([51], p. 611) è quello di B. Riemann che è seguito anche da H. Grassmann [19], H. Helmoltz [22], A. Cayley [10] ed altri autori:

Data una varietà in cui l'elemento di natura qualsiasi viene determinato da n *quantità variabili indipendenti, e viceversa (colla debita restrizione indicata da Cantor), essa si chiama* varietà ad n dimensioni. *Quando questa varietà è assoggettata alle leggi dello spazio ordinario, indipendentemente dalle dimensioni, essa si chiama pure* spazio e punto *il suo elemento.*

Nell'esporre le due posizioni, G. Veronese commenta ([51], p. 611):
Come si vede fra questa e la prima definizione vi è soltanto la differenza che la varietà non è la stessa varietà numerica che la determina, ma la sua esistenza dipende però da questa, che è pure una varietà. Il punto di vista della nostra definizione dei sistemi a una o a più dimensioni della nostra introduzione è più generale, perchè da essa noi deduciamo anche le varietà numeriche.

Ed aggiunge:
Per la seconda definizione, ogni varietà concreta, anche non geometrica, potrebbe essere chiamata col nome di spazio.
Non mancano anche autori che hanno la tendenza di chiamare geometria la teoria di ogni varietà analitica. Gli stessi o altri autori adoperano anche nei loro lavori la parola varietà anzichè spazio, *la quale, siccome prima mancava l'oggetto geometrico, era più propria.*

Subito dopo, G. Veronese espone la propria posizione, secondo la quale ritiene di avere costruito gli spazi a più dimensioni, nel modo seguente:
Ben distinta invece dalle precedenti è la nostra definizione di S_n, *cioè:*
Dato lo spazio S_3 *e un punto* fuori *di esso, costruiamo lo spazio* S_4, *e così analogamente lo spazio* S_n, *assoggettandolo agli assiomi dello spazio generale.*

E, poco sotto ([51], pp. 611-612), esplicita la sua concezione del punto che sia fuori dello spazio a tre dimensioni:
Qui il punto non è né un sistema di numeri, né un oggetto di natura qualsiasi, ma il punto tale e quale ce lo immaginiamo nello spazio ordinario; *e gli oggetti composti di punti sono oggetti (figure) a cui applichiamo continuamente l'intuizione spaziale combinata coll'astrazione, e quindi il metodo sintetico. Se ogni considerazione geometrica si deve interpretare nel senso che in essa si debba avere sempre la figura dinanzi agli occhi, coll'ultima definizione ma non colle precedenti si ottiene questo risultato.*

Si vedrà in seguito che proprio questa posizione di G. Veronese sarà oggetto delle critiche più forti e fondate di G. Peano.

Va ricordato tuttavia che polemiche analoghe a quella di cui stiamo occupandoci si erano verificate già all'estero, a proposito del linguaggio geometrico e della pretesa *esistenza reale* degli spazi geometrici a più di

tre dimensioni; per esempio, G. Veronese riporta ([51], p. 614) l'opinione di A. Lotze ([30], p. 217), secondo il quale
... il chiamare ancora spazio *un sistema a quattro o cinque dimensioni è soltanto un gioco logico.*

E riporta anche ([51], pp. 614-615) un'opinione di A. Genocchi ([16], [17]), che afferma:
Per me le questioni relative agli spazî ad un numero qualunque di dimensioni non sono che delle questioni di analisi . . .
Io non contesto l'utilità di questa nuova via aperta all'analisi, solamente si avrebbe torto di lasciar supporre che si creda alla realtà del significato geometrico dei nomi impiegati. Si spoglia così la geometria di ciò che forma il suo miglior vantaggio e la sua bellezza particolare, della proprietà cioè di dare una rappresentazione sensibile ai risultati dell'analisi, e si sostituisce questa qualità col difetto contrario, poichè dei risultati che non avrebbero niente di urtante sotto la loro forma analitica, non offrono più presa allo spirito, o sembrano assurdi quando si esprimano con una nomenclatura geometrica supponendo dei punti, delle linee e degli spazi che non hanno alcuna esistenza reale e di cui la supposizione ripugna al buon senso e oltrepassa la nostra intelligenza.

Come si vede, le posizioni dei due campi stanno delineandosi e, in certo qual modo, A. Genocchi esprime delle opinioni che saranno condivise dal suo allievo. Ma riteniamo che sia tempo di dare notizia della controversia che forma l'argomento del nostro lavoro.

4. L'occasione della polemica si trova in un lavoro di C. Segre intitolato *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche*, pubblicato sulla *Rivista di Matematica* diretta da G. Peano [44]. Esso ha come sottotitolo *Osservazioni dirette ai miei studenti*; in nota, lo stesso autore spiega che l'articolo è stato scritto
... aderendo alle gentili insistenze del Direttore di questa Rivista
e che in esso egli si accinge ad esporre
... riunite e con alcune aggiunte, delle considerazioni che, staccatamente, ebbi già occasione di fare in iscuola a giovani laureandi in matematiche, e che mirano specialmente a mettere in guardia coloro i quali vogliono darsi alle ricerche scientifiche da certi difetti od errori in cui facilmente cadono i giovani, ed in particolare i giovani geometri.

C. Segre, in questo suo articolo, propone tre modi di introdurre gli iperspazi ([44], pp. 59-61). Il primo procedimento ivi indicato consiste nel chiamare *punto* un gruppo qualunque di valori (da denominarsi *coordinate del punto*). A tale proposito, egli osserva che

... con ciò non si viene più a fare della vera geometria, poichè gli enti considerati sono essenzialmente analitici ... e la geometria proiettiva generale che così si viene a costruire non è altro in sostanza che l'algebra delle trasformazioni lineari.

Un secondo modo per introdurre gli iperspazi viene presentato da C. Segre osservando che si possono considerare certi enti come *punti* di uno spazio ad *n* dimensioni quando essi dipendano da *n* numeri (parametri). Così, per esempio, egli dice, un sistema lineare ad *n* dimensioni di curve piane di un certo ordine è, da questo punto di vista, uno spazio lineare ad *n* dimensioni.

Infine il nostro autore individua un terzo metodo per presentare il concetto di iperspazio; trascriviamo qui le sue parole in merito:

Infine si può riguardare lo spazio n *dimensioni come definito al modo stesso di quello ordinario, solo che si tolga il postulato delle tre dimensioni, e si modifichino in conseguenza alcuni di quelli relativi alla retta ed al piano.*

E, in una nota a fondo pagina, egli a questo punto segnala:

Non è ancora stato assegnato e discusso (ch'io sappia) un sistema di postulati indipendenti *che serva a caratterizzare lo spazio lineare ad* n *dimensioni, sì che se ne possa dedurre la rappresentazione dei punti di questo con coordinate. Sarebbe conveniente che qualche giovane si occupasse di questa quistione (che non sembra difficile).*

Poi C. Segre riprende:

Allora i punti *dell'iperspazio sono i punti tali quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario, e non più enti puramente analitici, od enti geometrici di qualunque natura.*

Approfondendo ulteriormente il suo pensiero, egli dice anche:

Lo spazio illimitato, senz'alcun vincolo al numero di dimensioni, è l'ambiente in cui ormai si debbono considerare le forme geometriche ([44], p. 63).

Come vedremo, queste proposizioni attireranno le critiche di G. Peano; ma questi si appunterà in particolare anche su altri passi del medesimo articolo: proprio questa attenzione di G. Peano su certi argomenti ci ha indotto a scrivere poco fa che la vera ragione del contendere è non soltanto la fondazione del concetto di iperspazio, ma soprattutto la concezione del rigore in matematica.

Invero C. Segre osserva che, nella scoperta delle verità matematiche, spesso l'immaginazione riveste un ruolo insostituibile, accanto alla logica, e che quest'ultima sovente interviene in un secondo tempo, quando la validità della proposizione scoperta è stata accertata in altro modo; un'opinione condivisa da molti matematici che hanno cercato anche di analizzare il processo psicologico della scoperta con una operazione di introspezione. Ricordiamo gli esempi classici di H. Poincaré [42], sui quali ritorneremo più avanti, ed il libro di J. Hadamard sulla psicologia della scoperta matematica [20].

C. Segre esprime questi pensieri con le seguenti parole ([44], p. 53):
Allo stesso modo come, allorquando si tratta solo di scoprire una verità, la purezza del metodo passa in seconda linea, così accade che in una prima ricerca si debba sacrificare (sacrificio molto più grave, trattandosi di matematica!) il rigore.

E poco sotto:
Certamente anche qui il matematico non potrà essere veramente contento quando ad un nuovo risultato sia giunto con procedimenti poco rigorosi: egli non si considererà come sicuro di quello finchè non l'avrà rigorosamente dimostrato. Ma non rigetterà senz'altro quei procedimenti incompleti nelle ricerche difficili in cui non possa sostituirli meglio; poichè la storia della scienza lo ammaestra appunto sull'utilità che tali metodi hanno sempre avuto.

Egli passa a ricordare i procedimenti di V. Poncelet e poi, in particolare, quelli utilizzati dalla geometria numerativa ([44], p. 54), richiamando l'attenzione del lettore sulla circostanza che tali metodi
... hanno condotto valenti scienziati, come il Jonquières, lo Schubert ed altri a risultati splendidi, fra cui molti ai quali la scienza attualmente ancora non saprebbe giungere per una via più rigorosa.

E conclude dicendo ([44], pp. 54-55):
Ora nel fare uso di simili mezzi d'investigazione il giovane deve badare che qui, come nelle salite difficili su erte pericolose, per non cadere nell'abisso o nell'errore ci vuole destrezza, prudenza e pratica. E dopo essersi valso colla massima cautela di quei mezzi per le sue scoperte deve cercare se non gli riesce di sostituirli con dimostrazioni sicure. Ma, come già dissi, io non credo che egli debba rinunziare ad occuparsi di una ricerca o ad esporre un suo risultato, perciò solo che egli non può procedere con metodi perfettamente rigorosi. La massima prudenza, ripeto ancora, il massimo numero di controlli ecc. ecc., ci vogliono per non cadere nell'errore; anche in ciò gioverà l'esempio degli scienziati di valore, per insegnare quando è che nel risultato ottenuto si può aver fiducia: ma allora sarà opportuno farlo conoscere. Solo bisognerà alla prudenza aggiungere l'onestà, cioè avvertire espressamente come la via tenuta non sia scevra di dubbi, affinchè nessuno

sia indotto a fidarsi ciecamente del risultato, ma anzi vi sia un invito a cercarne una più completa dimostrazione.

5. Come abbiamo visto, C. Segre non pone alcun tono polemico nella sua esposizione; tuttavia il suo articolo [44] probabilmente dette adito ad una discussione tra lo stesso autore e G. Peano, perchè proprio questi, che pure, in qualità di direttore della *Rivista di Matematica,* aveva pregato C. Segre di scrivere quel lavoro, fa seguire le pagine redatte dal collega da alcune *Osservazioni* ([35], pp. 66-67) sue personali che aprono la via alla polemica; e, in tale controversa questione, interverrà di lì a poco anche G. Veronese.

Nelle *Osservazioni* ora menzionate, G. Peano affronta innanzi tutto il problema del rigore; egli afferma perentoriamente:
Noi riteniamo falsa *una proposizione se vi si può trovare un caso d'eccezione; e che non si possa considerare come* ottenuto *un risultato, finchè esso non è rigorosamente provato, ancorchè non si conoscano casi d'eccezione* ([35], p. 66).

E poco sotto aggiunge ([35], p. 67):
Fatta la scelta dei punti di partenza, spetta alla matematica (che, secondo noi, è una logica perfezionata) a dedurne le conseguenze; e queste debbono essere assolutamente rigorose.

Notiamo, di passaggio, l'affermazione sul carattere della matematica, considerata come una *logica perfezionata,* che in certo senso dà la ragione profonda dell'atteggiamento di G. Peano e si adatta perfettamente al lavoro scientifico di tutta la sua vita.

Dopo queste affermazioni, che potremmo dire *di principio,* a proposito del rigore in matematica, egli affronta in particolare il problema della costruzione del concetto di iperspazio; e, precisamente, appunta le sue critiche sul terzo modo di presentare gli iperspazi confutando la concezione dei punti dello spazio a più dimensioni
. . . ove si supponga che i punti dell'iperspazio siano tali e quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario.

Il ragionamento di G. Peano è assolutamente inesorabile e si connette alla concezione della geometria che oggi potremmo caratterizzare affermando in breve che tale disciplina è un sistema ipotetico-deduttivo. In questo atteggiamento, è chiaro che la definizione degli enti di cui parla la geometria è data dall'insieme dei postulati che sono stati scelti come proposizioni iniziali. In siffatto ordine di idee, appare manifesto che, se si cambia il sistema di postulati anche soltanto mutando l'ipotesi relativa al numero di dimensioni dello spazio che si considera, si altera la definizione degli enti di cui si parla; e, di conseguenza, ogni ragionamento risulta necessariamente da modificare, anche se si adoperano nomi uguali in diverse argomentazioni, perchè esso tratta in realtà di enti diversi. In particolare G. Peano osserva che la geometria del piano dipende essenzialmente dalla ipotesi che questo ente sia immerso, oppure no, nella spazio a tre dimensioni. Sappiamo infatti che (ricorrendo alla terminologia moderna) le geometrie non desarguesiane sono valide soltanto in uno spazio essenzialmente a due dimensioni; se questo viene pensato immerso nello spazio a tre, oppure a più dimensioni, viene ad essere valido il teorema di Desargues.

Successivamente ([37], p. 157), rispondendo a C. Segre, G. Peano dichiara che, a proposito del primo modo di introdurre il concetto di iperspazio, egli non ha nulla da eccepire:

Se si chiama punto *un gruppo qualunque di* n *variabili, allora è ben noto che cessa ogni discussione sui postulati di Geometria; le teorie che si deducono sviluppano le conseguenze dei principii di aritmetica e non di quelli della geometria; ogni risultato così ottenuto è indipendente da qualsiasi postulato geometrico.*

E poco sotto aggiunge:

Per questa via si fa ancora della Matematica? Certo che si fa dell'Algebra se si ragiona bene; ma alcuni autori trattano usualmente *queste questioni contravvenendo alle regole algebriche.*

E qui si dà a spulciare un precedente lavoro di C. Segre, mettendo in evidenza certi errori nella introduzione delle coordinate omogenee di punto, che potrebbero essere attribuiti a leggere dimenticanze nella precisazione delle ipotesi oppure a poca accuratezza nelle definizioni. Invero a noi pare che un errore di questo tipo, se pure innegabile nella sua materialità, dimostri una dannosa influenza soltanto se l'autore cerca di dedurre delle conseguenze (in modo ovviamente illegittimo) dalle proposizioni non enunciate in modo perfetto, proprio basandosi su ciò che esse hanno di incompleto o di erroneo.

G. Peano ritornerà sullo stesso argomento in una recensione al libro [51] di G. Veronese, di cui diremo più diffusamente in seguito; egli, in tale occasione ([41], p. 144), affermerà:

... mentre la teoria analitica di questi spazi [gli spazi a più dimensioni] *non presenta difficoltà di sorta, riducendosi allora questa teoria ad un cambiamento di nomi ad enti algebrici, la teoria geometrica o sintetica, ove si considerino i punti dell'iperspazio tali e quali a quelli dello spazio ordinario, dà luogo a difficoltà, esigendosi allora un numero di postulati maggiore di quelli richiesti per la geometria ordinaria.*

Subito dopo, G. Peano accennerà al fatto che G. Veronese e C. Segre non avevano tenuto conto del lavoro di F. Amodeo intitolato *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno* S_r [1]. Riteniamo che a questa stessa memoria si riferisca l'appunto che G. Peano fa a C. Segre ([36], p. 154): come abbiamo visto, questi aveva scritto, in una nota a pie' di pagina ([44], pp. 60-61), che non era stato ancora assegnato un sistema di postulati indipendenti atto a caratterizzare lo spazio lineare ad n dimensioni e che sarebbe stato conveniente che qualche giovane si fosse occupato di tale questione. E G. Peano gli rimprovera appunto di avere proposto un'indagine

... *senza citare gli autori che già l'avevano sostanzialmente risolta.*

Crediamo sia lecito ravvisare in queste parole un riferimento anche ad F. Amodeo ed alla suddetta nota, oltre beninteso ad un accenno ai matematici che F. Amodeo stesso cita nel medesimo lavoro: R. De Paolis [13], M. Pasch [31], R. Clebsch [11], G. Lindemann [11].

La discussione, del cui inizio abbiamo finora parlato, nei primi mesi del 1891 si era svolta esclusivamente tra G. Peano e C. Segre; è da ricordare tuttavia che G. Veronese, nello stesso periodo, aveva dato alle stampe il suo libro [51]: esso sarebbe comparso alla fine del novembre di quello stesso anno. Egli certamente aveva seguito da vicino la discussione a proposito del fondamento del concetto di iperspazio, come si desume da una nota a fondo pagina della suddetta memoria di F. Amodeo ([1], p. 743), nella quale si menzionano appunto delle comunicazioni *a voce* fatte da G. Veronese allo stesso autore.

È da pensarsi che G. Veronese fosse stimolato dalla polemica tra i due colleghi ad esprimere un proprio giudizio sull'argomento, giudizio al quale probabilmente egli si riteneva autorizzato in virtù dei suoi lavori precedenti e della circostanza che, nel suo trattato, venivano presi in considerazione tra l'altro anche i fondamenti della geometria degli iperspazi.

6. G. Veronese ha occasione di esprimere delle opinioni personali sulle idee e sull'opera di G. Peano nella poderosa *Appendice* al suo testo [51], intitolata *Studio storico e critico dei principii della geometria* ([51], pp. 565-625). In essa egli tratta anche della logica simbolica, ricordando ([51], p. 605) che R. Descartes e G. Leibniz già avevano avuto l'idea di rappresentare i concetti con dei segni, dando delle regole per la manovra dei medesimi simboli; egli ricorda poi alcuni lavori di G. Boole e di G. Schröder e infine si occupa delle possibili applicazioni degli strumenti logici nell'ambito della matematica. Era questa una strada che G. Peano aveva già preso

e che avrebbe percorso per intero con risultati brillanti; tuttavia G. Veronese si dimostra abbastanza scettico a proposito dell'utilità di questi nuovi mezzi e dice esplicitamente ([51], p. 606) che

... non è escluso che anche col linguaggio comune, con la debita attenzione non si possa giungere ad un'espressione chiara dei principî e delle operazioni della logica stessa che occorrono per stabilire i concetti fondamentali della matematica.

Ed aggiunge poco sotto:

E dobbiamo esprimere subito la nostra convinzione che anche se si avesse un linguaggio completo di segni logici per esprimere tutte le verità conosciute delle scienze matematiche nell'ordine che ci pare migliore e atto ad esprimere con semplicità le nuove vi sarebbe sempre una differenza notevolissima tra l'interesse logico di questo sistema di segni e l'interesse matematico.

Al fondo della medesima pagina, si legge inoltre che certi appunti mossi da G. Peano a M. Pasch sono

più di forma che di sostanza,

perchè, secondo G. Veronese, M. Pasch si sarebbe limitato a non enunciare in modo esplicito una condizione che appare naturale quando si tenga conto del contesto.

Più avanti ([51], p. 607), egli dichiara:

... i lavori del sig. Peano ... sono l'ultima espressione di quel metodo che si può chiamare signicismo *...*;

e, dopo aver aggiunto altri rilievi all'atteggiamento di G. Peano, ripete i propri dubbi sull'opportunità e sulla possibilità del calcolo logico, inteso, invece, dal collega come strumento principe per l'esposizione matematica.

Sempre nell'*Appendice*, troviamo un capitolo intitolato *Sulle definizioni di spazio e di geometria ad* n *dimensioni e del principio di proiezione e sezione*; qui, in una nota a pie' di pagina ([51], p. 613), G. Veronese interviene direttamente nella discussione tra G. Peano e C. Segre:

Contro l'articolo citato dal prof. Segre stampato nella Rivista di Matematica di cui è direttore il prof. Peano, questi credette opportuno iniziare una polemica (fasc. 4-5, pag. 66-69 e fasc. 6-7, pag. 154-159) parte della quale è rivolta contro gli iperspazi nel senso da me inteso e specialmente contro l'uso del metodo di proiezione e di sezione non solo dagli iperspazi allo spazio ordinario, ma eziandio dallo spazio ordinario al piano. Il sig. Peano ha torto nella forma e nella sostanza, ma per quanto non sia difficile rispondere alle sue affermazioni, siccome egli accusa di mancanza di buon senso quei geometri che non possono pensare come lui (l. c., pag. 157) è resa così impossibile ogni dignitosa ed amichevole discussione. Io sono con-

vinto che le questioni sui principi della matematica, e specialmente della geometria, siano già di per sé abbastanza difficili senza che vi sia bisogno di aggiungervi nuove difficoltà di altra natura con polemiche appassionate ed intolleranti, come sono altresì convinto che certe critiche pel modo con cui sono fatte portano chiaramente in sé la loro condanna.

Non stiamo per ora ad avanzare apprezzamenti sulle idee espresse da G. Veronese in questa sua opera; ci limitiamo ad osservare che il termine *signicismo* è un neologismo forse coniato dallo stesso autore per indicare a suo modo il metodo con cui G. Peano utilizzava una ideografia con uno scopo ben preciso; tale scopo non era evidentemente ben compreso a quell'epoca da G. Veronese, incline ad apprezzare la ricerca di nuovi risultati più della critica rigorosa dei ragionamenti. E su questo argomento egli doveva necessariamente essere d'accordo con C. Segre e con l'opinione che questi aveva a proposito della parte sostenuta così spesso dalla fantasia nella scoperta dei risultati in geometria.

Era da attendersi che G. Peano non tacesse di fronte ad appunti come quelli che abbiamo riportato e che dimostravano una certa quale incomprensione della sua mentalità e dell'apporto che egli aveva recato al problema dei fondamenti della matematica; vedremo subito in quali termini G. Peano risponda e ritorca le critiche mossegli contro i suoi stessi avversari.

7. La prima risposta di G. Peano a G. Veronese ha la forma di una *Lettera aperta al Prof. G. Veronese* e compare il 12 dicembre 1891 nella *Rivista di Matematica*, a breve termine quindi dopo la pubblicazione del testo di G. Veronese. In questo scritto, G. Peano riporta ([38], p. 267) una frase del collega:

Ad ogni modo non vediamo alcuna differenza sostanziale fra le ipotesi o postulati astratti e le definizioni o convenzioni di segni necessarie allo svolgimento della scienza;

e fa un commento graffiante:

E finchè questa confusione fra ipotesi e definizioni si riferisce al suo lavoro, io condivido la sua opinione.

Poi prosegue sullo stesso tono ([38], p. 268), facendo vedere che G. Veronese ha criticato la sua (di G. Peano) definizione di numero razionale, perchè non ha inteso rettamente i simboli di logica con i quali detta proposizione era stata presentata negli *Arithmetices principia*. Infine contrattacca sfidando G. Veronese a dare la *non difficile risposta* ([51], p. 613) della quale aveva scritto nel suo libro.

L'anno successivo, G. Peano pubblica un articolo intitolato *Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti* [39]. Egli ivi non nomina esplicitamente G. Veronese, ma appare abbastanze verosimile la congettura che tutta questa trattazione sia diretta a dimostrare l'assurdità del Capitolo VI, dal titolo *Segmenti finiti, infiniti, infinitesimi, indefinitamente piccoli e indefinitamente grandi. Numeri infiniti.*, del volume di G. Veronese.

La suddetta dimostrazione viene presentata come una esplicitazione di certe idee esposte da G. Cantor [6]; secondo G. Peano, quest'ultimo autore aveva fornito una risposta definitiva in senso negativo circa la possibilità di esistenza di segmenti infinitesimi ed egli la riprende, giustificando il suo operato come segue:
. . . ma la dimostrazione che questo illustre matematico ne diede è così concisa che fu giudicata incompleta. Scopo della presente nota è di sviluppare questa dimostrazione.

Infine G. Peano torna a parlare del testo di G. Veronese [51], nel Volume II della sua *Rivista di Matematica*, recensendo il medesimo trattato [41]. Tale recensione è una stroncatura radicale, sprezzante nella forma e nel contenuto. Egli incomincia riportando alcune frasi infelici riscontrabili nell'opera e commentando:
Queste sgrammaticature, abituali nell'autore, rendono assai difficile la lettura del libro ed inintelleggibili alcuni suoi punti. Vedasi ad es. l'ipotesi IV (pag. 92).

Poi passa immediatamente ad analizzare gli enunciati:
Riguardo alle nozioni comuni, a pag. 2 l'A. ammette due principii necessari, *di, cui il secondo* è la negazione *(così dice l'A.) del primo; e il cui insieme quindi costituisce l'assurdo.* ([41], p. 143).

La recensione, tenuta molto breve forse proprio per dimostrare la scarsa stima di G. Peano per l'opera esaminata, termina con la seguente affermazione:
E si potrebbe lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro, tolgono ad esso ogni valore ([41], p. 144).

8. G. Veronese risponde a queste critiche di G. Peano con una comunicazione al Circolo Matematico di Palermo (13 marzo 1892) intitolata *A proposito di una lettera del Prof. Peano* [52] e con una seconda comunica zione allo stesso Circolo (22 maggio 1892) dal titolo *Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale* [53]. Nella prima,

egli difende la sua concezione di iperspazio distinguendo ([52], p. 43) tra *geometria teoretica* e le *sue applicazioni, dimodochè vi sono assiomi necessari per queste (ad es. l'assioma del movimento e quello delle tre dimensioni dello spazio fisico) che non lo sono per quella (p. IX).*

Egli aggiunge anche poco sotto:

Lo spazio ordinario, piuttosto che il luogo degli oggetti esterni considerato come esistente fuori di noi ed unico, è per me la nostra rappresentazione intuitiva di esso. È poi per mezzo di operazioni mentali che io immagino dei punti fuori dello spazio a tre dimensioni. E li possiamo immaginare sia per via di definizioni, sia per via di ipotesi.

E continua:

... se l'intuizione è necessaria per l'essenza della geometria (e secondo me dunque anche per quella a più di tre dimensioni nel senso sopra spiegato) non deve però essere elemento necessario, per quanto utile, nello svolgimento logico della geometria stessa ...

Nella seconda comunicazione, egli difende la propria introduzione dei segmenti infinitesimi e dichiara di essere stato a conoscenza della dimostrazione di G. Cantor contro l'esistenza di segmenti infinitesimi attuali; ma ribadisce di avere fondato la propria teoria in modo che essa fosse al riparo dalle critiche di G. Cantor e, di conseguenza, da quelle di G. Peano che di queste altre volevano essere l'esplicitazione.

Non intendiamo entrare nella discussione in merito e ci limitiamo a *riferire le parole di C. Segre* ([46], p. 225):

Così a Veronese spetta il vanto di aver dato, dopo la grande invenzione della Geometria non-Euclidea, un secondo esempio di Geometria diversa da quella tradizionale: la Geometria non-Archimedea. *I segmenti rettilinei che compaiono in questa Geometria possono essere, gli uni rispetto agli altri, infiniti o infinitesimi. Si ha una classe di numeri transfiniti* (diversi da quelli di G. Cantor).

La natura delicata dell'argomento, e un po' anche una certa oscurità e trascuranza nell'esposizione, hanno permesso che si elevassero dei dubbi sulla solidità dell'edificio non- Archimedeo di Veronese. Ma i dilucidamenti forniti da questo e più ancora dal Levi-Civita, e certamente il fatto che, più tardi, Hilbert ([23], p. 49) *per via analitica semplicissima ha pure mostrato la possibilità logica di una Geometria non-Archimedea, hanno fatto tacere le discussioni che s'eran sollevate al riguardo.*

La polemica si chiude, per quanto è a nostra conoscenza, con una *Breve replica al prof. Veronese* [40], pubblicata sui *Rendiconti* del Circolo Matematico di Palermo (22 maggio 1892), nella quale G. Peano ribadisce le proprie opinioni con poche frasi.

Non ci interessa approfondire ulteriormente la ricerca dei documenti e dei rapporti successivi tra i tre matematici in questione; neppure intendiamo esprimere giudizi sulle loro rispettive posizioni. Ormai ciascuno dei protagonisti della controvesia che abbiamo riesumato ha nella storia delle matematiche italiane un posto ben delineato che una nostra analisi più profonda non potrebbe alterare, poichè essa non apporterebbe comunque nuovi elementi di valutazione. Si potrebbe semmai trarre dalla disputa qualche conferma di quanto già si narra sul carattere dei protagonisti. A questo proposito si potrebbe dire, per esempio, che G. Peano era un polemista molto forte con un temperamento non troppo malleabile; per quanto riguarda G. Veronese, che egli parlava in modo poco preciso di *intuizione* e di *pensiero*, quando avrebbe dovuto più propriamente esprimersi in termini di *immaginazione* e *fantasia*. Inoltre l'esposizione di quest'ultimo, come abbiamo sentito anche da C. Segre, non era certo conforme a quel modello di ferrea concisione e di inesorabile coerenza che caratterizza gli scritti di G. Peano. Forse, per spiegare le differenza di atteggiamenti che spinse G. Peano da una parte e C. Segre e G. Veronese dall'altra ad assumere posizioni distinte ed in certo qual modo opposte, ci si potrebbe rifare alla celebre conferenza [42], tenuta da H. Poincaré al Congresso Internazionale dei Matematici svoltosi a Parigi nell'anno 1900, che aveva appunto come argomento: *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques.* In essa il grande matematico francese distingue due tipi fondamentali di mentalità matematica:

È impossibile studiare le opere dei grandi matematici (e anche quelle dei piccoli) senza notare due tendenze opposte, o piuttosto due spiriti del tutto diversi. Gli uni sono preoccupati della logica; a leggere i loro lavori, si direbbe che hanno camminato soltanto passo passo con il metodo di un Vauban che spinge i suoi trinceramenti contro una piazzaforte senza lasciare nulla al caso. Gli altri si lasciano guidare dall'intuizione, e fanno delle conquiste rapide ed improvvise, ma talvolta precarie, come dei cavalleggeri d'avanguardia.

Non è la materia trattata che impone l'uno o l'altro metodo. Anche se i primi vengono spesso chiamati analisti, *e i secondi vengono chiamati* geometri, *ciò non impedisce che i primi restino analisti anche quando fanno della geometria ed i secondi restino geometri anche quando si occupano di analisi matematica pura. È la natura stessa della loro intelligenza che li rende logici oppure intuitivi, e non si possono spogliare della loro natura quando studiano un argomento nuovo.*

Queste parole de H. Poincaré ci esimono, forse, dall'approfondire l'analisi dei caratteri delle persone interessate alla polemica; e d'altra parte una indagine di questo tipo esula dai fini del presente lavoro. A noi pare debba piuttosto mettersi in risalto la circostanza che la divergenza d'opinioni sulla quale abbiamo brevemente riferito testimonia un'evoluzione radicale dei concetti fondamentali della matematica e quindi è caratteristica del momento storico in cui tale ramo della scienza cambiava la propria struttura e cominciava a prendere coscienza del suo stesso mutamento.

È interessante, per esempio, osservare che nell'opera di E. Bertini *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e le loro singolarità*, comparsa nel 1909, non vi è più traccia delle preoccupazioni, che tanto avevano assillato G. Veronese e C. Segre, di dare una giustificazione ed un fondamento logico al concetto di iperspazio; dice infatti E. Bertini, accettando senza difficoltà l'identificazione del punto con un successione di numeri ([3], p. 1):

... *astraendo da ogni possibile rappresentazione geometrica od intuitiva, si definisce* spazio lineare *o semplicemente* spario ad r dimensioni *e si indica con* S_r, *o anche con* [r], la totalità formata da tutti i gruppi di valori dei rapporti di $r + 1$ parametri $x_0, x_1, \ldots, x_r$: *escluso che questi parametri possano diventare tutti nulli o alcuno infinito. Ogni tale gruppo dicesi* punto dell'S_r ...

Lo stesso C. Segre, nel 1921, si esprime così ([45], p. 788):

... *ein Punkt x (bedeutet oder) ist bestimmt durch die Werte von* n + 1 *Zahlen* ...

Certe moderne correnti della matematica escludono addirittura che la geometria possa accampare un qualunque diritto all'esistenza. Per esempio, N. Bourbaki scrive:

Rimane un ristretto campo, dove continuano ad esercitarsi con fortuna numerosi amatori (geometria del triangolo, del tetraedro, delle curve e superfici algebriche di ordine basso, ecc.). Ma per il matematico di professione la miniera è esaurita, poichè non vi sono più problemi di struttura suscettibili di far presa su altre parti della matematica, e questo capitolo della teoria dei gruppi e degli invarianti può considerarsi chiuso fino a nuovo ordine (*).

Così dopo il programma di Erlangen, le geometrie euclidee e non euclidee, dal punto di vista puramente algebrico, sono diventate semplici linguaggi, più o meno comodi, per esprimere i risultati della teoria delle forme bili-

---

(*) *Si intende che della ineluttabile decadenza della geometria (euclidea o proiettiva), oggi evidente ai nostri occhi, non si occorsero per molto tempo i contemporanei, e fin verso il 1900 questa disciplina continuò a figurare tra i rami importanti della matematica come testimonia per esempio il posto da essa occupato nella* Encyklopädie; *e fino a non molti anni fa essa occupava ancora questo posto nell'insegnamento universitario.*

neari, i cui progressi vanno di pari passo con quelli della teoria degli invarianti . . . ([5], p. 137)
. . . *Sorpassata, come scienza autonoma e viva, la geometria classica si è così trasfigurata in linguaggio universale della matematica contemporanea, di incomparabili comodità e scioltezza.* ([5], p. 139).

Ammettendo per un momento che questa posizione sia valida, pensiamo tuttavia che l'analisi delle psicologie della ricerca e dell'invenzione matematiche compiuta da H. Poincaré [42] sia molto illuminante per riuscire a comprendere anche lo stesso atteggiamento radicale di coloro che abbiamo citato e che stendono l'atto di morte della geometria. E la Storia ha sempre qualche cosa da insegnare, a chi voglia avere la saggezza di ascoltarla.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMODEO F., *Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria proiettiva di uno* S_r, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXVI (1891), pp. 741-770.

[2] BELTRAMI E., *Saggio di interpretazione della Geometria non Euclidea*, Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane pubblicato da G. Battaglini, vol. VI (1868), pp. 284-312.

[3] BERTINI E., *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, con appendice sulle curve algebriche e le loro singolarità*, 1ª ed., Pisa, 1907.

[4] BETTI E., *Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni*, Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II, vol. IV (1870-1871), pp. 140-158.

[5] BOURBAKI N., *Elementi di storia della matematica*, ed. Feltrinelli, Milano, 1963 (trad. italiana di M.L. Vesentini Ottolenghi).

[6] CANTOR G., *Grundlagen einer allg. Mannigfaltigkeitslehre*, Zeitschrift für Philosophie v. Fichte, vol. 91, fasc. I (1887).

[7] CASSINA U., *L'opera scientifica di Giuseppe Peano* (testo commemorativo, seguito dall'elenco cronologico completo delle opere di G. Peano), Rend. del Seminario Matem. e Fisico di Milano, vol. VII (1933), pp. 323-389.

[8] CASSINA U., *Alcune lettere e documenti inediti sul trattato di Calcolo di Genocchi-Peano*, Rend. dell'Istituto Lombardo di Milano, Cl. Sc., vol. 85 (1952), pp. 337-362.

[9] CAUCHY A.L., *Mémoire sur les lieux géométriques*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris, vol. XXIV (1847).

[10] CAYLEY A., *Chapters in the analytical geometry of* (n) *dimensions*, Cambridge and Dublin mathematical Journal, vol. IV (1845), pp. 119-127.

[11] CLEBSCH R.F. - LINDEMANN G., *Vorlesungen über Geometrie*, vol. II, Lipsia, 1891.

[12] DARBOUX G., *Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques*, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris, vol. 69 (1869).

[13] DE PAOLIS R., *Sui fondamenti della geometria proiettiva*, Atti della R. Accad. dei Lincei, serie 3ª, vol. IX (1880-81), pp. 489 e sgg.

[14] GENOCCHI A., *Dei principi della meccanica e della geometria*, Memorie della Società italiana (detta dei XL), Serie 3ª, vol. II (1869).

[15] GENOCCHI A., *Intorno ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex*, Atti della R. Accad. della Scienze di Torino, vol. IV (1869).

[16] GENOCCHI A., *Lettre à M. Quetelet sur diverses questions mathématiques*, Bulletin de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Serie 2ª, vol. XXVI (1873).

[17] GENOCCHI A., *Sur une Mémoire de Daviet de Foncenex et sur les géomètres non-euclidiens*, Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino, Serie 2ª, Vol. XXIX (1877).

[18] GENOCCHI A., *Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte da G. Peano*, ed. Bocca, Torino, 1884.

[19] GRASSMANN H., *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Lipsia, 1844.

[20] HADAMARD J., *The psicology of Invention in the Mathematical Field*, Dover Publication, 1954.

[21] HALPHEN G., *Recherches de géométrie à n dimensions*, Bulletin de la Société mathématique de France, vol. II (1875).

[22] HELMOLTZ H., *Ueber die Thatsachen welche der Geometrie zu Grunde Liegen,* Nachrichten Abhandlungen der Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen, 1868.

[23] HILBERT D., *Fondamenti della geometria, con i Supplementi di P. Bernays,* ed. Feltrinelli, Milano, 1970 (trad italiana, di P. Canetta, dei *Grundlagen der Geometrie,* 10ª ed., ed. Teubner, Stoccarda, 1968).

[24] JORDAN C., *Essai sur la géométrie à n dimensions.* Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris, 1872.

[25] KLEIN F., *Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen,* Erlangen, 1872.

[26] KLEIN F., *Ueber die sogennante Nicht Euclidische Geometrie,* Matematische Annalen, vol. VI (1873).

[27] KRONECKER L., *Ueber Systeme von Functionem mehrer Variabeln,* Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1869.

[28] LAGRANGE J.L., *Mécanique analytique,* 2 volumi, ed. Courcier, Parigi, 1811-1815.

[29] LIE S., *Ueber diejenige Theorie eines Raumes mit beliebig vielen Dimensionen, die der Krümmungstheorie des gewöhnlichen Raumes entspricht,* Nachritchten des Gesellschaft der Wissensch, zu Göttingen, 1871.

[30] LOTZE A., *Logik,* Lipsia, 1843.

[31] PASCH M., *Vorlesungen über neuere Geometrie,* Lipsia, 1884.

[32] PEANO G., *Arithmetices principia, nova methodo exposita,* ed. Bocca, Torino, 1889.

[33] PEANO G., *Sulla definizione dell'area d'una superficie,* Rend. della R. Accad. Nazionale dei Lincei, 1890, 19 genn., (4), vol. VI, I sem., pp. 54-57.

[34] PEANO G., *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane,* Matematische Annalen, vol. XXXVI (1890), pp. 157-160.

[35] PEANO G., *Osservazioni del Direttore* (ad un articolo di C. Segre), Rivista di Matematica, vol. I (1891), ed. Bocca, Torino, pp. 66-69.

[36] PEANO G., *Corrispondenza,* Rivista di Matematica, vol. I (1891), ed. Bocca, Torino, p. 154.

[37] PEANO G., *Risposta,* Rivista di Matematica, vol. I (1891), ed. Bocca, Torino, pp. 156-159.

[38] PEANO G., *Lettera aperta al Prof. G. Veronese,* Rivista di Matematica, vol. I (1891), ed. Bocca, Torino, pp. 267-269.

[39] PEANO G., *Dimostrazione dell'impossibilità di segmenti infinitesimi costanti,* Rivista di Matematica, vol. II (1892), ed. Bocca, Torino, pp. 58-62.

[40] PEANO G., *Breve replica al Prof. Veronese,* Rend. del Circolo Matem. di Palermo, vol. VI (1892), p. 160.

[41] PEANO G., *Recensione al volume di G. Veronese, « Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, ecc. »,* Rivista di Matematica, vol. II (1892), ed. Bocca, Torino. pp. 143-144.

[42] POINCARÉ H., *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques,* Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens (Paris, 6-12 août 1900), ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1902.

[43] SALMON G., *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra,* Dublino, 1866.

[44] SEGRE C., *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche,* Rivista di Matematica, vol. I (1891), ed. Bocca, Torino, pp. 42-66.

[45] SEGRE C., *Meherdimensionale Räume,* Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, III, C 7, Bd. II, vol. II, Lipsia, 1921, pp. 669-972.

[46] SEGRE C., *Commemorazione del Socio Nazionale* GIUSEPPE VERONESE, (seguita dall'elenco cronologico completo delle opere di G. Veronese), Rend. della Accademia Nazionale dei Lincei, 1917, vol. XXVI, (5) pp. 249-258.

[47] SEGRE C., *Opere*, a cura dell'U.M.I. e col contributo del C.N.R., vol. I, ed. Cremonese, Roma, 1957.

[48] SEVERI F., *Prefazione al Volume I delle « Opere » di C. Segre a cura dell'U.M.I. e col contributo del C.N.R.*, ed. Cremonese, Roma, 1957, pp. V-XII.

[49] VERONESE G., *Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen dimensionen durch das Princip der Projicirens und Schneidens*, Mathematische Annalen, vol. XIX (1882), pp. 161-234.

[50] VERONESE G., *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine della spazio a cinque dimensioni e le sue projezioni nel piano e nello spazio ordinario*, Rend. della Accad. Nazionale dei Lincei, vol. XIX (3), (1883-4), pp. 344-371.

[51] VERONESE G., *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di Magistero in Matematica.*, Tipografia del Seminario, Padova, 1891.

[52] VERONESE G., *A proposito di una lettera del Prof. Peano*, Rend. del Circolo Matem. di Palermo, vol. VI (1892), pp. 42-47.

[53] VERONESE G., *Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale*, Rend. del Circolo Matem. di Palermo, vol. VI (1892), pp. 73-76.

Finito di stampare nel mese di aprile 1979
dalla S.T.E.M. - MUCCHI - Modena